TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU NỬA ĐẠI SỐ

Trần Ngọc Tâm[9],
Nguyễn Chí Thắng[10]

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán tối ưu nửa đại số. Các tính chất như tính khác rỗng, tính lồi, tính compact, tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của nghiệm bài toán đang xét đã được nghiên cứu.*

Từ khóa: *Bài toán tối ưu nửa đại số, Các điều kiện tồn tại, Tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới, Tính compact, Tính lồi*

Abstract: *In this paper, we consider semi-algebraic optimization problems. Some properties of solutions such as the non-emptiness, convexity, compactness, upper and lower semicontinuity are investigated.*

Keywords: *Semi-algebraic optimization, Existence conditions, Upper and Lower semicontinuity, Compactness, Convexity*

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu hóa xuất hiện trong hầu hết các ngành như kỹ thuật, vật lý, toán học, kinh tế, hành chính, thương mại, khoa học xã hội và thậm chí là chính trị. Bài toán này còn xuất hiện rất nhiều trong các lĩnh vực kỹ thuật khác nhau như kỹ thuật điện, cơ khí, dân dụng, hóa chất và xây dựng. Các lĩnh vực tiêu biểu của ứng dụng là mô hình hóa, đặc tính hóa và thiết kế các thiết bị, mạch và hệ thống; thiết kế các công cụ, dụng cụ và thiết bị; thiết kế kết cấu và xây dựng; kiểm soát quá trình; lý thuyết xấp xỉ, nghiệm của hệ thống các phương trình; tính ổn định; dự báo, lập kế hoạch sản xuất, kiểm soát chất lượng; bảo trì và sửa chữa; kiểm soát hàng tồn kho, kế toán, ngân sách,...

Một số những đổi mới gần đây phụ thuộc gần như hoàn toàn vào lý thuyết tối ưu hóa, ví dụ, mạng lưới thần kinh và hệ thống thích ứng. Hầu hết các vấn đề thực tế có rất nhiều giải pháp và đôi khi là vô hạn số lượng các giải pháp có thể. Giả sử rằng bài toán đang xét thừa nhận nhiều hơn một giải pháp, tối ưu hóa có thể đạt được bằng cách tìm giải pháp tốt nhất của vấn đề theo một số tiêu chí nào đó.

Trong bài báo này, chúng tôi xét tính chất tập nghiệm của bài toán tối ưu nửa đại số phụ thuộc tham số bao gồm tính khác rỗng, tính lồi, tính compact, tính nửa liên tục trên và nửa

[9] Tiến sĩ, Trường Đại học Nam Cần Thơ
[10] Thạc sĩ, Trường Đại học Nam Cần Thơ

liên tục dưới. Bài toán tối ưu nửa đại số là một dạng đặc biệt của lớp các bài toán tối ưu nhưng nó chứa rất nhiều các bài toán quan trọng khác trong tối ưu, chẳng hạn như bài toán tối ưu lồi (không lồi) với hàm toàn phương có ràng buộc, bài toán qui hoạch tuyến tính (phi tuyến) nguyên,...

Phần còn lại của bài báo được trình bày như sau. Phần 2 giới thiệu mô hình bài toán và các kiến thức chuẩn bị để sử dụng cho các phần sau. Phần 3 trình bày các tính chất của nghiệm bài toán tối ưu nửa đại số như đã đề cập ở trên.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN VÀ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, ta xét không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ được trang bị tích vô hướng thông thường $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và chuẩn Euclide $\|\cdot\|$. Để đơn giản, ta viết x thay cho $(x_1,\ldots,x_n)$. Xét $f, g_1,\ldots,g_l, h_1,\ldots,h_m$ là các đa thức với hệ số thực trong $\mathbb{R}^n$ và tập hợp S xác định như sau:

$$S:=\{x\in\mathbb{R}^n: g_1(x)=0,\ldots,g_l(x)=0, h_1(x)\geq 0,\ldots,h_m(x)\geq 0\},$$

là một tập nửa đại số. Với mỗi tham số $u\in\mathbb{R}^n$, ta xét bài toán quy hoạch nửa đại số phụ thuộc tham số sau đây:

(PSOP): $\min[f(x)-\langle u,x\rangle]$ với $x\in S$.

Ta ký hiệu tập nghiệm của (PSOP) là $Sol(u)$, tức là:

$$Sol(u):=\{x\in S: f(x)-\langle u,x\rangle\leq f(y)-\langle u,y\rangle\ \forall y\in S.$$

Sau đây, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản cần thiết để sử dụng cho các phần tiếp theo.

Ta nói rằng F là một ánh xạ đa trị từ X vào Y, ký hiệu là $F: X\rightrightarrows Y$, nếu với mọi $x\in X$ thì $F(x)$ là một tập con của Y. Ta kí hiệu miền hữu hiệu của F là $domF:=\{x\in X: F(x)\neq\emptyset\}$ và đồ thị của F là $grF:=\{(x,y): y\in F(x)\}$.

Định nghĩa 1 Cho Ω là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ đa trị $H:\Omega\rightrightarrows\Omega$ được gọi là một ánh xạ Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (viết tắt là KKM) nếu với mọi tập con hữu hạn $\{y_1,\ldots,y_n\}$ của Ω thì ta có $conv\{y_1,\ldots,y_n\}\subset\bigcap_{i=1}^n H(y_i)$, trong đó "$conv$" là ký hiệu bao lồi, tức là $conv\{y_1,\ldots,y_n\}=\{y: y=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i, \sum_{i=1}^n\lambda_i=1, \lambda_i\geq 0\}$.

Ví dụ 1 Ánh xạ $H:(0,+\infty)\rightrightarrows\mathbb{R}$ xác định bởi $H(x)=[x,+\infty)$ với mọi $x\in(0,+\infty)$ là một ánh xạ KKM.

Bổ đề 1 Cho Ω là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng:

i) Ánh xạ $H:\Omega\rightrightarrows\Omega$ là ánh xạ KKM có giá trị đóng;

ii) tồn tại một tập con lồi, compact (đóng và bị chặn) và khác rỗng D của Ω sao cho $\bigcap_{y\in D}H(y)$ là tập compact.

Khi đó, $\bigcap_{y\in\Omega}H(y)$ khác rỗng.

Định nghĩa 2 Cho ánh xạ đa trị $F:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$. Khi đó:

a) F được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại $x_0\in\mathbb{R}^n$ nếu với tập mở U bất kỳ của $\mathbb{R}^m$ thỏa mãn $F(x_0)\subset U$ thì tồn tại ϵ sao cho $F(x)\subset U$ với $\|x-x_0\|\leq\epsilon$.

b) F được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của $\mathbb{R}^m$ thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại ϵ sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với $\|x - x_0\| \leq \epsilon$.

c) F được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó vừa là usc vừa là lsc tại x_0.

Ánh xạ F được gọi là usc, lsc hay liên tục trên tập $A \subset \mathbb{R}^n$ nếu nó thỏa mãn các tính chất tương ứng đó tại tất cả các điểm thuộc A. Trong trường hợp $A = domF$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên A" trong các phát biểu.

Bổ đề 2 i) *F là nửa liên tục dưới khi và chỉ khi với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_0 \in F(x_0)$ thì tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.*

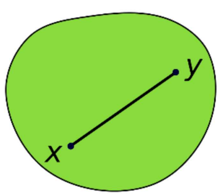
ii) *F là nửa liên tục dưới khi và chỉ khi mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 thì ta có $F(x_0) \subset$ lim inf $F(x_n)$, trong đó* lim inf $F(x_n) := \{y_0 : \exists y_n \in F(x_n), y_n \to y_0\}$.

Bổ đề 3 *Giả sử ánh xạ đa trị $F: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ có giá trị compact tại x_0. Khi đó, F nửa liên tục trên tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset grF$ với $x_n \to x_0$ thì $\{y_n\}$ có một điểm tụ trong $F(x_0)$, tức là dãy $\{y_n\}$ có dãy con hội tụ về một phần tử y_0 nào đó của $F(x_0)$.*

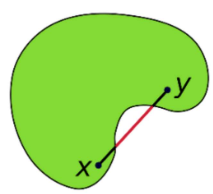
Định nghĩa 3 Một hàm số $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là *lồi* trên tập con lồi $A \subset \mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $t \in [0,1]$ thì

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Định nghĩa 4 Một tập con A của $\mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi* nếu với mọi $x, y \in A$ và $t \in [0,1]$ thì $tx + (1-t)y \in A$.



Tập lồi



Tập không lồi

3. TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU NỬA ĐẠI SỐ

3.1 Tính khác rỗng và lồi của nghiệm

Định lí 1 *Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(i) *f lồi trên $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *(Điều kiện bức) với mỗi $u \in \mathbb{R}^n$ thì tồn tại một tập con compact $N \subset S$ và một tập con lồi, compact $D \subset S$ sao cho với mọi $x \in S \backslash N$ thì tồn tại $y \in D$ thỏa mãn*

$$f(x) - \langle u, x \rangle > f(y) - \langle u, y \rangle.$$

Khi đó $Sol(u)$ là tập khác rỗng và là tập lồi.

Chứng minh:

Với mỗi $u \in \mathbb{R}^n$, ta xét ánh xạ $H: S \to S$ xác định bởi

$$H(y) := \{x \in S : f(x) - \langle u, x \rangle \leq f(y) - \langle u, y \rangle \quad \forall\, y \in S.$$

Nhận xét rằng x^* là nghiệm của bài toán (PSOP) khi và chỉ khi $x^* \in \bigcup_{y\in S} H(y)$. Dễ thấy rằng $H(y)$ luôn khác rỗng vì $y \in H(y)$ với mọi $y \in S$.

Bây giờ ta chứng minh H là một ánh xạ KKM. Giả sử rằng H không là ánh xạ KKM. Khi đó tồn tại một tập con hữu hạn $\{y_1, \dots, y_n\}$ của S với $conv\{y_1, \dots, y_n\}$ không chứa trong $\bigcup_{i=1}^n H(y_i)$, tức là tồn tại $y \in conv\{y_1, \dots, y_n\}$ nhưng $y \notin \bigcup_{i=1}^n H(y_i)$. Do đó, $y \notin H(y_i)$ với mọi i. Theo định nghĩa của H thì

$$f(y) - \langle u, y\rangle > f(y_i) - \langle u, y_i\rangle \ \forall\, i. \qquad (1)$$

Do $y \in conv\{y_1, \dots, y_n\}$ nên $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ với $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Theo tính lồi của f ở giả thiết i) ta suy ra

$$\begin{aligned} f(y) - \langle u, y\rangle = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) - \left\langle u, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right\rangle &\le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(y_i) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u, y_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i [f(y_i) - \langle u, y_i\rangle] \\ &< \sum_{i=1}^n \lambda_i [f(y) - \langle u, y\rangle] \\ &= f(y) - \langle u, y\rangle. \end{aligned}$$

Đây là điều vô lý. Do đó, H là một ánh xạ KKM.

Bây giờ ta chứng minh tính đóng của $H(y)$ với mọi $y \in S$. Lấy $x_n \in H(y)$ với $x_n \to x_0$. Khi đó,

$$f(x_n) - \langle u, x_n\rangle \le f(y) - \langle u, y\rangle.$$

Bất đẳng thức này kết hợp với tính liên tục của f dẫn đến

$$f(x_0) - \langle u, x_0\rangle \le f(y) - \langle u, y\rangle.$$

Điều này chứng tỏ $x_0 \in H(y)$ nên $H(y)$ là một tập đóng. Để kết thúc chứng minh của định lý ta cần chứng tỏ rằng $\bigcap_{y\in D} H(y)$ là tập compact. Thật vậy, $\bigcap_{y\in D} H(y)$ là tập đóng và do ii) nên $\bigcap_{y\in D} H(y) \subseteq N$. Vì $\bigcap_{y\in D} H(y)$ là tập con đóng trong tập compact N nên $\bigcap_{y\in D} H(y)$ là một tập compact.

Cuối cùng ta chứng minh tính lồi của $Sol(u)$. Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in Sol(u)$ và $t \in [0,1]$ thì với mọi $y \in S$, ta có

$$f(x_1) - \langle u, x_1\rangle \le f(y) - \langle u, y\rangle;$$
$$f(x_2) - \langle u, x_2\rangle \le f(y) - \langle u, y\rangle.$$

Sử dụng tính lồi của f ta được các ước lượng sau

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) - \langle u, tx_1 + (1-t)x_2\rangle \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - t\langle u, x_1\rangle \\ -(1-t)\langle u, x_2\rangle \end{aligned}$$

$$\leq t[f(x_1) - \langle u, x_1\rangle] + (1-t)[f(x_2) - \langle u, x_2\rangle]$$
$$\leq t[f(y) - \langle u, y\rangle] + (1-t)[f(y) - \langle u, y\rangle]$$
$$= f(y) - \langle u, y\rangle.$$

Tức là, $tx_1 + (1-t)x_2 \in Sol(u)$ hay $Sol(u)$ là tập lồi. Định lý đã được chứng minh xong.

3.2 Tính nửa liên tục trên và tính compact của nghiệm

Định lí 2

Nếu S là tập compact khác rỗng thì $Sol(\cdot)$ là nửa liên tục trên trên $\mathbb{R}^n$ và $Sol(u)$ là tập compact với mọi $u \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh:

Giả sử rằng tồn tại $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mà $Sol(\cdot)$ không nửa liên tục trên tại u_0. Khi đó, tồn tại một lân cận U của $Sol(u_0)$ sao cho có dãy $u_n \to u_0$ và $x_n \in Sol(u_n)$ nhưng $x_n \notin U$ với mọi n. Do tính compact của S nên ta có thể giả sử rằng $x_n \to x_0$. Nếu $x_0 \notin Sol(u_0)$ thì tồn tại $y_0 \in S$ sao cho

$$f(x_0) - \langle u_0, x_0\rangle > f(y_0) - \langle u_0, y_0\rangle. \qquad (2)$$

Cũng do tính compact S nên tồn tại $y_n \in S$ với $y_n \to y_0$. Vì $x_n \in Sol(u_n)$ nên ta có

$$f(x_n) - \langle u_n, x_n\rangle \leq f(y_n) - \langle u_n, y_n\rangle.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với tính liên tục của f, ta được $f(x_0) - \langle u_0, x_0\rangle \leq f(y_0) - \langle u_0, y_0\rangle$. Điều này mâu thuẫn với (2). Vậy S nửa liên tục trên tại λ_0.

Tiếp theo, với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, ta kiểm tra tính compact của $Sol(u)$ bằng cách chứng minh tính đóng của nó trong tập compact S. Lấy $x_n \in Sol(u)$ với $x_n \to x_0$. Lập luận tương tự như trên ta chứng minh được $x_0 \in Sol(u)$. Vậy $Sol(u)$ là tập compact.

3.3 Tính nửa liên tục dưới của nghiệm

Với mỗi $u \in \mathbb{R}^n$, xét tập hợp sau:

$$Sol_1(u) := \{x \in S : f(x) - \langle u, x\rangle < f(y) - \langle u, y\rangle \ \ \forall y \in S\}.$$

Rõ ràng, $Sol_1(u) \subseteq Sol(u)$ với mọi $u \in \mathbb{R}^n$.

Định lí 3

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn

(i) *S là tập compact;*

(ii) *f là lồi trên $\mathbb{R}^n$.*

Khi đó, $Sol(\cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh $Sol_1(\cdot)$ nửa liên tục dưới trên $\mathbb{R}^n$.

Giả sử rằng tồn tại $u_0 \in \mathbb{R}^n$ mà $Sol_1(\cdot)$ không nửa liên tục dưới tại u_0, nghĩa là tồn tại $x_0 \in Sol_1(u_0)$ và một dãy $\{u_n\} \subset \Lambda$ hội tụ về u_0 sao cho với mọi $x_n \in S_1(u_n)$ thì x_n không hội tụ về x_0. Vì S compact nên tồn tại $\bar{x}_n \in S$ với $\bar{x}_n \to x_0$. Do ta giả sử $Sol_1(\cdot)$ không nửa liên tục dưới tại u_0, nên có một dãy con $\bar{x}_m$ của $\bar{x}_n$ sao cho với mọi m thì $\bar{x}_m \notin Sol_1(u_m)$. Tức là, với $y_m \in S$ nào đó, ta có

$$f(x_m) - \langle u_m, x_m \rangle > f(y_m) - \langle u_m, y_m \rangle.$$

Do tính compact của S nên tồn tại $y_0 \in S$ sao cho $y_m \to y_0$ (lấy dãy con nếu cần). Vì f liên tục nên ta suy ra

$$f(x_0) - \langle u_0, x_0 \rangle \geq f(y_0) - \langle u_0, y_0 \rangle.$$

Điều này mâu thuẫn với $x_0 \in Sol_1(u_0)$. Vì vậy, $Sol_1(\cdot)$ nửa liên tục dưới tại u_0.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $Sol(u_0) \subset \mathrm{cl}Sol_1(u_0)$, trong đó ký hiệu $\mathrm{cl}A$ là bao đóng của tập A. Thật vậy, lấy tùy ý $x_1 \in Sol(u_0)$, $x_2 \in Sol_1(u_0)$ và đặt $x_t := tx_1 + (1-t)x_2$ với $t \in [0,1]$. Sử dụng tính lồi của f, với mọi $y \in S$, ta có

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) - \langle u, tx_1 + (1-t)x_2 \rangle &\leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - t\langle u, x_1 \rangle \\ &\quad -(1-t)\langle u, x_2 \rangle \\ &\leq t[f(x_1) - \langle u, x_1 \rangle] + (1-t)[f(x_2) - \langle u, x_2 \rangle] \\ &< t[f(y) - \langle u, y \rangle] + (1-t)[f(y) - \langle u, y \rangle] \\ &= f(y) - \langle u, y \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra $x_t \in Sol_1(u_0)$. Vì $x_t \to x_1$ khi $t \to 1$, nên $x_1 \in \mathrm{cl}Sol_1(u_0)$.

Do đó, $Sol(u_0) \subset \mathrm{cl}Sol_1(u_0)$.

Từ kết quả $Sol_1(u_0)$ nửa liên tục dưới tại u_0, ta có các bao hàm thức sau

$$Sol(u_0) \subset \mathrm{cl}Sol_1(u_0) \subset \liminf Sol_1(u_n) \subset \liminf Sol(u_n).$$

Nghĩa là $Sol(\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại u_0. Ta kết thúc chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. L.Q. Anh, P.Q. Khanh, T.N. Tam: Continuity of approximate solution maps of primal and dual vector equilibrium problems. Optimization Letters. 131:201-211 (2018)

[2]. L.Q. Anh, P.T. Duoc, T.N. Tam: On Holder continuity of solution maps to parametric vector primal and dual equilibrium problems. Optimization. 67:1169-1182 (2018)

[3]. G.M. Lee, P.T. Son: Generic Properties for Semialgebraic Programs. SIAM. 27:2061-2084 (2017)

[4]. N.T.T. Huong, J.-C. Yao, N.D. Yen: Polynomial Vector Variational Inequalities under Polynomial Constraints and Applications. SIAM. 26:1060-1071 (2016)

[5]. J. B. Lasserre: An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization. Cambridge University Press (2015)