TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐỐI XỨNG ĐA TRỊ

Trần Ngọc Tâm[2]

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu bài toán cân bằng đối xứng đa trị ở cả hai dạng yếu và mạnh trong không gian vectơ metric. Các điều kiện đủ cho tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm các bài toán này được thiết lập. Áp dụng các kết quả này vào các trường hợp đặc biệt của các bài toán trên được trình bày ở cuối bài báo.

Từ khóa: *Sự ổn định nghiệm, bài toán cân bằng đối xứng, bài toán cân bằng*

Abstract

In this paper, we study the problems of multivalued symmetric equilibrium in vector metric space at weak and strong conditions. Sufficient conditions for Lipschitz continuity of the solution mappings are established. At the end of the paper, we present applications to some special cases of these problems.

Keywords: *Stability of solutions, symmetric equilibrium problems, equilibrium problems*

1. MỞ ĐẦU

Một trong những bài toán trong tối ưu hóa được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu là lớp các bài toán cân bằng. Bài toán này đã được hai nhà toán học Blum và Oettli giới thiệu vào năm 1994. Mô hình bài toán cân bằng là dạng hợp nhất của nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hóa như: Bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán điểm trùng và điểm bất động, bài toán mạng giao thông,... Chính vì vai trò quan trọng của lớp bài toán này, nên hàng năm có rất nhiều công trình nghiên cứu về tính chất nghiệm của chúng đã được công bố đều đặn và rộng khắp trên thế giới. Các tính chất nghiệm của bài toán được nghiên cứu bao gồm: sự tồn tại nghiệm, tính ổn định nghiệm, sự đặt chỉnh và các phương pháp giải nghiệm.

Hiện nay, bài toán cân bằng đã được nghiên cứu và mở rộng rất nhiều so với dạng gốc của nó. Một trong những mô hình mở rộng của bài toán này là bài toán cân bằng đối xứng do hai nhà toán học Noor và Oettli đưa ra năm 1994. Mô hình của bài toán cân bằng đối xứng rất tiện lợi khi ta áp dụng vào các trường hợp thực tế, nhất là các tình huống có tính đối kháng như bài toán cạnh tranh kinh tế, lý thuyết trò chơi,... Cho đến nay, hầu hết những công trình đã có chỉ nghiên cứu vấn đề sự tồn tại nghiệm của lớp bài toán này, chẳng hạn như các bài báo của

[2] Tiến sĩ Trường Đại học Nam Cần Thơ

Fu (2003), Farajzadeh (2006), Anh-Khanh (2007),... Về tính ổn định nghiệm thì chỉ có các bài báo Anh-Khanh (2008) và Yuan-Gong nghiên cứu theo nghĩa tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm. Bài báo này nghiên cứu tính ổn định nghiệm theo nghĩa liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng đối xứng đa trị. Cụ thể, các điều kiện đủ cho tính liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm của các bài toán này được thiết lập dựa vào các điều kiện về tính đơn điệu của ánh xạ đa trị.

Xét X, Y, Z là các không gian vectơ mêtric, M và Λ là các không gian mêtric. Xét $K \subseteq X$, $D \subseteq Y$ và $C \subseteq Z$ với C là tập lồi và có phần trong khác rỗng, tức là $\mathrm{int}C \neq \emptyset$. Xét các ánh xạ đa trị $S: \Lambda \rightrightarrows K, T: \Lambda \rightrightarrows D, F: K \times D \times K \times M \rightrightarrows Z$ và $G: K \times D \times D \times M \rightrightarrows Z$. Với mỗi $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$, ta xét hai bài toán cân bằng vectơ đối xứng đa trị phụ thuộc tham số sau đây:

(SEP_1): Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x, \mu) \cap (Z \backslash -\mathrm{int}C) \neq \emptyset, \forall x \in S(\lambda),$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, y, \mu) \cap (Z \backslash -\mathrm{int}C) \neq \emptyset, \forall y \in T(\lambda).$$

(SEP_2): Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x, \mu) \subseteq (Z \backslash -\mathrm{int}C), \forall x \in S(\lambda),$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, y, \mu) \subseteq (Z \backslash -\mathrm{int}C), \forall y \in T(\lambda).$$

Ta ký hiệu $S_1(\lambda, \mu)$ và $S_2(\lambda, \mu)$ lần lượt là hai tập nghiệm của (SEP_1) và (SEP_2) tại điểm $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$.

Với các số dương l, m, n, h và B_X là quả cầu mở đơn vị trong X, ta xét các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1

Ánh xạ đa trị $S: \Lambda \rightrightarrows X$ được gọi là L-Lipschitz tại $\lambda_0 \in \Lambda$, nếu có một lân cận N của λ_0 sao cho với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in N$ thì

$$S(\lambda_1) \subseteq S(\lambda_2) + LB_X\big(0, d(\lambda_1, \lambda_2)\big).$$

Định nghĩa 2

Ánh xạ đa trị $F: X \times Y \times M \rightrightarrows Z$ được gọi là $h.m.n$-Lipschitz tại (x_0, y_0, μ_0), nếu tồn tại các lân cận N_1 của x_0, N_2 của y_0 và N_3 của μ_0 sao cho với mọi $(x_1, y_1, \mu_1), (x_2, y_2, \mu_2) \in N_1 \times N_2 \times N_3$ thì

$$F(x_1, y_1, \mu_1) \subseteq F(x_2, y_2, \mu_2) + B_Z\big(0, hd(x_1, x_2) + md(y_1, y_2) + nd(\mu_1, \mu_2)\big).$$

Định nghĩa 3

(a) Ánh xạ đa trị $G: X \times X \rightrightarrows Z$ được gọi là tựa đơn điệu loại 1 trên $A \subset X$, nếu với mọi $x, y \in A, x \neq y$ và $G(x, y) \subseteq -\mathrm{int}C$ thì $G(y, x) \nsubseteq -\mathrm{int}C$.

(b) Ánh xạ đa trị $G: X \times X \rightrightarrows Z$ được gọi là tựa đơn điệu loại 2 trên $A \subset X$, nếu với mọi $x, y \in A, x \neq y$ và $(x, y) \nsubseteq Z \backslash -\mathrm{int}C$ thì $G(y, x) \subseteq Z \backslash -\mathrm{int}C$.

Định nghĩa 4

(a) Ánh xạ đa trị $G: X \times X \rightrightarrows Z$ được gọi là l-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S \subset X$, nếu với mọi $x, y \in S, x \neq y$ và $G(x,y) \not\subseteq -\text{int}C$ thì $G(y,x) + l\,B_Z(0, d(x,y)) \subseteq -C$.

(b) Ánh xạ đa trị $G: X \times X \rightrightarrows Z$ được gọi là l-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $S \subset X$, nếu với mọi $x, y \in S, x \neq y$ và $G(x,y) \subseteq Z\backslash -\text{int}C$ thì $G(y,x) + l\,B_Z(0, d(x,y)) \subseteq -C$.

Cho A và B là hai tập con trong không gian mêtric X, khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B là $H(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}$, với $e(A,B) := \sup\{d(a,B) : a \in A\}$ và $d(a,B) := \inf\{d(a,b) : b \in B\}$.

2. TÍNH LIÊN TỤC LIPSCHITZ CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM

Trong mục này, xét X, Y, Z là các không gian vectơ mêtric và Λ, M là các không gian mêtric. Ta giả sử rằng $S_1(\lambda,\mu) \neq \emptyset$, $S_2(\lambda,\mu) \neq \emptyset$ trong lân cận của điểm đang xét $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times$ M. Đặt $B_Z(0,\rho) := \{z \in Z : d(0,z) < \rho\}, \forall \rho > 0$. Với mọi $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X \times Y$, ta xét $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2)$ là một mêtric trên không gian tích $X \times Y$.

Định lý 1: *Xét bài toán* (SEP$_1$), *giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *S và T lần lượt là L_1-Lipschitz và L_2-Lipschitz tại λ_0;*

(ii) *tồn tại lân cận U của μ_0 sao cho với mọi $\mu \in U, F(\cdot,\cdot,\cdot,\mu)$ tựa đơn điệu loại 1 và l_1-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S(\lambda), G(\cdot,\cdot,\cdot,\mu)$ tựa đơn điệu loại 1 và l_2-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $T(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận N* của *λ_0 sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $(x,y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$,*

$F(x,\cdot,\cdot,\cdot)$ và $G(\cdot,y,\cdot,\cdot)$ lần lượt là $h_1.m_1.n_1$ -Lipschitz và $h_2.m_2.n_2$-Lipschitz

trên $S(\lambda) \times T(\lambda) \times U(\mu_0)$ với $l_1 l_2 > m_1 h_2$.

Khi đó, S_1 là đơn trị và liên tục Lipschitz tại (λ_0,μ_0), tức là, với mọi (λ_1, μ_1) và (λ_2,μ_2) trong một lân cận của (λ_0,μ_0), ta có

$$d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)\big) \leq kd(\lambda_1,\lambda_2) + ld(\mu_1,\mu_2), \quad (1)$$

với $(x,y)(\lambda,\mu) := (x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu))$ là nghiệm duy nhất của $(SVEP_1)$ tại (λ,μ).

Chứng minh

Lấy $(\lambda_1,\mu_1), (\lambda_2,\mu_2) \in N(\lambda_0) \times U(\mu_0)$. Do $(x,y)(\lambda_1,\mu_1) \in S_1(\lambda_1,\mu_1)$ nên

$$F(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2), \mu_1) \not\subseteq -\text{int}C, \quad (2)$$

$$G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), \mu_1) \not\subseteq -\text{int}C. \quad (3)$$

Kết hợp (2), (3) và giả thiết (ii), ta có

$$F(x(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_1), \mu_1) + l_1 B_Z(0; d(x(\lambda_1,\mu_1), x(\lambda_1,\mu_2))) \subseteq -C,$$

$$G(x(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2), y(\lambda_1,\mu_1), \mu_1) + l_2 B_Z\Big(0; d\big(y(\lambda_1,\mu_1), y(\lambda_1,\mu_2)\big)\Big) \subseteq -C.$$

Khi đó, với mọi $z \notin -\text{int}C$ thì

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),\{z\}), \quad (4)$$

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_2} H(G(x(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),\{z\}). \quad (5)$$

Vì $(x,y)(\lambda_1,\mu_2) \in S_1(\lambda_1,\mu_2)$, nên tồn tại $z_1 \in F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_2)$ và $z_2 \in G(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_2)$ sao cho với mọi $z_{1,2} \notin -\mathrm{int}C$ thì

$$H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),\{z_1\}) \le$$
$$\le H\big(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_2)\big), \quad (6)$$

và $H(G(x(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),\{z_2\}) \le$

$$\le H\big(G(x(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_2)\big). \quad (7)$$

Theo giả thiết (iii) và từ (6), (7) ta suy ra

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),$$
$$F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_1),\mu_2)) \le \frac{1}{l_1}\big[m_1\, d\big(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2)\big) + n_1 d(\mu_1,\mu_2)\big],$$

và

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2)\big)$$
$$\le \frac{1}{l_2} H(G(x(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_1),G(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_1),\mu_2))$$
$$\le \frac{1}{l_2}\,[h_2 d(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)) + n_2 d(\mu_1,\mu_2)].$$

Do đó,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{m_1}{l_1} d(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2)) + \frac{n_1}{l_1} d(\mu_1,\mu_2)$$
$$\le \frac{m_1 h_2}{l_1 l_2}\; d(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)) + \frac{m_1 n_2}{l_1 l_2}\; d(\mu_1,\mu_2) + \frac{n_1}{l_1} d(\mu_1,\mu_2),$$

và

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{m_1 n_2 + n_1 l_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2).$$

Tương tự, ta có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2)\big) \le \frac{n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2).$$

Từ đó, ta suy ra

$$d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_1,\mu_2)\big) = d(x(\lambda_1,\mu_1),x(\lambda_1,\mu_2)) + d(y(\lambda_1,\mu_1),y(\lambda_1,\mu_2))$$
$$\le \frac{m_1 n_2 + n_1 l_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2) + \frac{n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2} d(\mu_1,\mu_2)$$
$$\le l d(\mu_1,\mu_2), \quad (8)$$

với $l := \dfrac{m_1 n_2 + n_1 l_2 + n_1 h_2 + l_1 n_2}{l_1 l_2 - m_1 h_2}$.

Bây giờ ta ước lượng cho $d\big((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)\big)$. Ta xét hai trường hợp sau.

Nếu $F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) \not\subseteq -\mathrm{int}C$, thì từ giả thiết (ii) ta có,

$$F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2) + l_1 B\left(0; d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big)\right) \subseteq -C.$$

Vì thế, với mọi $z \notin -\mathrm{int}C$,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \tfrac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2),\{z\}).(9)$$

Do S liên tục Lipschitz tại λ_0, nên tồn tại $\bar{x} \in S(\lambda_2)$ sao cho $d(x(\lambda_1,\mu_2),\bar{x}) \le L_1 d(\lambda_1,\lambda_2)$. Vì $(x,y)(\lambda_2,\mu_2) \in S_1(\lambda_2,\mu_2)$, có $\bar{z} \in F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\bar{x},\mu_2), \bar{z} \notin -\mathrm{int}C$. Giả thiết (ii), (iii) và (9) cho ta

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2),\{\bar{z}\})$$

$$\le \tfrac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2),F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2),\bar{x},\mu_2))$$

$$\le \frac{m_1}{l_1} d(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)) + \frac{h_1}{l_1} d(x(\lambda_1,\mu_2),\bar{x})$$

$$\le \frac{m_1}{l_1} d(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)) + \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Nếu $F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) \subseteq -\mathrm{int}C$, thì từ (ii) ta có $F(x(\lambda_2,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2)$ $x(\lambda_1,\mu_2),\mu_2) \not\subseteq -\mathrm{int}C$ và do đó,

$$F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2) + l_1 B(0; d(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2))) \subseteq -C.$$

Từ đó ta thấy rằng, với mọi $z \notin -\mathrm{int}C$,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \tfrac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),\{z\}). \quad (10)$$

Áp dụng (i), ta suy ra tồn tại $\hat{x} \in S(\lambda_1)$, sao cho $d(x(\lambda_2,\mu_2),\hat{x}) \le L_1 d(\lambda_1,\lambda_2)$.

Vì $(x,y)(\lambda_1,\mu_2) \in S_1(\lambda_1,\mu_2)$ nên có $\hat{z} \in F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),\hat{x},\mu_2), \hat{z} \notin -\mathrm{int}C$. Từ điều này, (ii), (iii) và (10) suy ra

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{1}{l_1} H(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),\{\hat{z}\})$$

$$\le \frac{1}{l_1} H\big(F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2),\mu_2),F(x(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_1,\mu_2),\hat{x},\mu_2)\big)$$

$$\le \frac{h_1}{l_1} d(x(\lambda_2,\mu_2),\hat{x}) \le \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Như vậy, ta luôn có

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{m_1}{l_1} d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{h_1 L_1}{l_1} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Lý luận tương tự như trên, ta cũng có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_2}{l_2}\, d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{m_2L_2}{l_2} d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Vì thế,

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{m_1h_2}{l_1l_2}\, d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) + \frac{m_1m_2\ L_2}{l_1l_2} d(\lambda_1,\lambda_2) + \frac{h_1L_1}{l_1}\, d(\lambda_1,\lambda_2),$$

tức là

$$d\big(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_1l_2L_1\ + m_1m_2L_2}{l_1l_2\ -\ m_1h_2}\ d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Lý luận hoàn toàn tương tự, ta có

$$d\big(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)\big) \le \frac{h_1h_2L_1\ +\ m_2l_1L_2}{l_1l_2\ -\ m_1h_2}\ d(\lambda_1,\lambda_2).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} d((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) &= d(x(\lambda_1,\mu_2),x(\lambda_2,\mu_2))\ + d(y(\lambda_1,\mu_2),y(\lambda_2,\mu_2)) \\ &\le \frac{h_1l_2L_1\ +\ m_1m_2L_2\ +\ h_1h_2L_1\ +\ m_2l_1L_2}{l_1l_2\ -\ m_1h_2}\ d(\lambda_1,\lambda_2) \\ &\le\ kd(\lambda_1,\lambda_2), \end{aligned} \tag{11}$$

với $k := \dfrac{h_1l_2L_1 + m_1m_2L_2 + h_1h_2L_1 + m_2l_1L_2}{l_1l_2 - m_1h_2}$.

Do (8) và (11), ta suy ra

$$\begin{aligned} &d((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) \le\ d((x,y)(\lambda_1,\mu_1),(x,y)(\lambda_1,\mu_2)) + \\ &d((x,y)(\lambda_1,\mu_2),(x,y)(\lambda_2,\mu_2)) \le\ kd(\lambda_1,\lambda_2)\ +\ ld(\mu_1,\mu_2). \end{aligned}$$

Do đó, $S_1(\cdot,\cdot)$ liên tục Lipschitz tại (λ_0,μ_0). Ta thấy rằng nếu $\lambda_1 = \lambda_2$ và $\mu_1 = \mu_2$ thì đường kính của $S_1(\lambda_1,\mu_1)$ bằng 0, tức là ánh xạ nghiệm của (SEP_1) là đơn trị. □

Định lý 2: *Xét bài toán* (SEP_2). *Giả sử rằng các giả thiết* (i), (iii) *ở Định lí 1 được thỏa mãn và giả thiết* (ii) *được thay thế bằng giả thiết* (ii') *như sau:*

(ii') *tồn tại lân cận U của μ_0 sao cho với mọi $\mu \in\ U, F(\cdot,\cdot,\cdot,\mu)$ tựa đơn điệu loại 2 và l_1-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $S(\lambda), G(\cdot,\cdot,\cdot,\mu)$ tựa đơn điệu loại 2 và l_2-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $T(\lambda)$.*

Khi đó, ánh nghiệm của (SEP_2) *là đơn trị và liên tục Lipschitz tại* (λ_0,μ_0).

Do cách chứng minh tương tự như cho Định lý 1 nên ta không trình bày ở đây.

3. ÁP DỤNG

3.1. Bài toán cân bằng đối xứng đơn trị

Khi F và G là ánh xạ đơn trị thì (SEP_1) và (SEP_2) trở thành bài toán cân bằng đối xứng.
(SEP): Tìm $(\bar{x}, \bar{y}) \in K \times D$ sao cho $\bar{x} \in S(\lambda), \bar{y} \in T(\lambda)$ và $\forall (x, y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$,

$$F(\bar{x}, \bar{y}, x, \mu) \in (Z \backslash -\text{int}C),\ G(\bar{x}, \bar{y}, y, \mu) \in (Z \backslash -\text{int}C).$$

Hệ quả 1: *Giả sử rằng*

(i) *S và T liên tục Lipschitz tại λ_0;*

(ii) *tồn tại lân cận U của μ_0 sao cho $\forall \mu \in U, F, G$ tựa đơn điệu loại 1 trên $S(\lambda) \times T(\lambda), F$ và G lần lượt là l_1-Lipschitz và l_2-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S(\lambda) \times T(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận N của λ_0 sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $(x, y) \in S(\lambda) \times T(\lambda)$, $F(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ và $G(\cdot, y, \cdot, \cdot)$ liên tục Lipschitz trên $S(\lambda) \times T(\lambda)$.*

Khi đó, ánh xạ nghiệm bài toán (SEP) *là đơn trị và liên tục Lipschitz tại (λ_0, μ_0).*

3.2. Bài toán cân bằng

Xét X, Y, Z, K, D, C, T như trong phần Mở đầu. Đặt $F(x, y, \bar{x}, \mu) \equiv F(x, \bar{x}, \mu)$ và $G(x, \bar{y}, y, \mu) \equiv C$. Khi đó, ($SEP_1$) và ($SEP_2$) trở thành bài toán cân bằng vectơ sau đây:

(WEP): Tìm $\bar{x} \in S(\lambda)$ sao cho với mọi $x \in S(\lambda)$,

$$F(\bar{x}, x, \mu) \cap (Z \backslash -\text{int}C) \neq \emptyset.$$

(SEP): Tìm $\bar{x} \in S(\lambda)$ sao cho với mọi $x \in S(\lambda)$,

$$F(\bar{x}, x, \mu) \subseteq (Z \backslash -\text{int}C).$$

Với $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$, ta kí hiệu $S^w(\lambda, \mu)$ và $S^s(\lambda, \mu)$ lần lượt là tập nghiệm của (WEP) và (SEP).

Hệ quả 2: *Giả sử đối với* (WEP), *các điều kiện sau được nghiệm đúng:*

(i) *S liên tục Lipschitz tại λ_0;*

(ii) *tồn tại lân cận U của μ_0 sao cho với mọi $\mu \in U$, $F(\cdot, \cdot, \mu)$ tựa đơn điệu loại 1 và l-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 1 trên $S(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận N của λ_0 sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $x \in S(\lambda), F(x, \cdot, \cdot)$ là $h.m$-Lipschitz trên $S(\lambda) \times U(\mu_0)$.*

Khi đó, nghiệm của (WEP) *là duy nhất và S^w liên tục Lipschitz tại (λ_0, μ_0), tức là với (λ_1, μ_1) và (λ_2, μ_2) trong một lân cận của (λ_0, μ_0), thì*

$$d\big(x(\lambda_1, \mu_1), x(\lambda_2, \mu_2)\big) \leq kd(\lambda_1, \lambda_2) + ld(\mu_1, \mu_2),$$

với $x(\lambda, \mu)$ là nghiệm duy nhất của (WEP) *tại (λ, μ).*

Hệ quả 3: Xét bài toán (SEP). *Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(i) *S liên tục Lipschitz tại λ_0;*

(ii) *tồn tại lân cận U của μ_0 sao cho với mọi $\mu \in U, F(\cdot,\cdot,\mu)$ tựa đơn điệu loại 2 và l-Lipschitz giả đơn điệu mạnh loại 2 trên $S(\lambda)$;*

(iii) *tồn tại lân cận N của λ_0 sao cho với mỗi $\lambda \in N$ và $x \in S(\lambda), F(x,\cdot,\cdot)$ là h.m-Lipschitz trên $S(\lambda) \times U(\mu_0)$.*

Khi đó, nghiệm của (SEP) *là duy nhất và S^s liên tục Lipschitz tại (λ_0, μ_0).*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N.: On Holder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems. Nonlinear Analysis 75, 2293-2303 (2012).

[2]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., Van, D.T.M: On Holder calmness and Holder well-posedness of vector quasiequilibrium problems. Vietnam J. Math. 41, 507-517 (2013).

[3]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N.: On Holder continuity of solution maps of parametric primal and dual Ky Fan inequalities. TOP 23, 151-167 (2015).

[4]. Anh, L.Q., Tam, T.N.: Sensitivity analysis for parametric vector equilibrium problems, J. Nonlinear Convex Anal.18, 1707-1716 (2017).

[5]. Anh, L.Q., Kien, N.T., Tam, T.N.: On Holder continuity of approximatesolutions maps to vector equilibrium problems. Turkish J. Math. 41, 1591-1607 (2017).

[6]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q.: On the Holder continuity of solutions to parametric multivalued vectorequilibrium problems. J. Math. Anal. Appl. 321, 308-315 (2006).

[7]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q.: Uniqueness and Holder continuity of the solution to multivaluedequilibrium problems in metric spaces. J. Glob. Optim. 37, 449-465 (2007).

[8]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q.: Various kinds of semicontinuity and the solution sets of parametricmultivalued symmetric vector quasiequilibrium problems. J. Glob.Optim. 41 539-558 (2008).

[9]. Anh, L.Q., Khanh, P.Q.: Holder continuityof the unique solution to quasiequilibrium problems in metric spaces. J. Optim. Theory Appl. 41, 37-54 (2009).

[10]. Blum, E., Oettli, W.: From optimization and variational inequalities toequilibrium problems. Math. Student 63, 123-145 (1994).

[11]. Fu, J.Y.: Symmetric vector quasiequilibrium problems. J. Math. Anal.Appl. 285, 708-713 (2003).

[12]. Noor, M.A., Oettli, W.: On general nonlinear complementarity problems and quasiequilibria. Mathmatiche XLIX, 313-331 (1994).